

## Monitoring Kualitas Air dengan Menggunakan Bagan Kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average*

Ardiansyah Abubakar<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Prodi Statistika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Patempo, Makassar  
[ardiansyahabubakar946@gmail.com](mailto:ardiansyahabubakar946@gmail.com)

### Abstract

*When it comes to maintaining human existence and the lives of other living creatures, water is one of the components whose importance cannot be overstated. Large volumes of water are always needed for a variety of human activities, including those involved in the economy and society, such industry, healthcare, hospitality, trade, offices, and education. The application of a control chart is one way that may be utilized to assess the water's quality. Control charts are one of the statistical process control techniques that are used to monitor two or more correlated quality characteristics separately, which becomes inefficient and leads to incorrect conclusions, and are therefore referred to as multivariate control charts. Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA) are multivariate control charts that can monitor the mean process. The secondary data used in this study was acquired from PDAM Tirta Je'neberang Gowa Regency. The sample is a measure of the turbidity and free chlorine in the water. The daily water treatment process for PDAM Tirta Je'neberang Gowa Regency is split into two sections. The first phase will run from January through June 2020, while the second will run from July through December 2020. Based on the monitoring results, it was determined that the data started to be statistically controlled at a weight of 0.8 and Upper Center Limit of 10.58 for both phases. This demonstrates that in the absence of out of control data, the weighting of 0.8 is the most effective in detecting the mean process.*

*Keywords: Control Charts; Water; MEWMA*

### Abstrak

Air merupakan salah satu komponen terpenting dalam memelihara kehidupan manusia dan kehidupan makhluk hidup lainnya, dan fungsinya tidak dapat dipenuhi oleh komponen lain mana pun. Berbagai aktivitas manusia, baik dalam kehidupan ekonomi maupun sosial, seperti industri, rumah sakit, hotel, perdagangan, perkantoran, dan pendidikan, selalu membutuhkan volume air yang cukup besar. Penerapan bagan kendali merupakan salah satu cara yang dapat dimanfaatkan untuk menilai kualitas air. Untuk memantau dua atau lebih variabel kualitas terkait secara terpisah tanpa adanya asumsi data menjadi tidak efektif atau memberikan kesimpulan yang salah, bagan kendali tersebut dikenal sebagai bagan kendali multivariat adalah salah satu alat kendali dalam proses statistik. Bagan kendali multivariat yang dapat melacak rata-rata proses disebut Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA). Data sekunder dari PDAM Tirta Je'neberang Kabupaten Gowa digunakan dalam penelitian ini dengan sampel pengukuran yaitu kekeruhan dan klor bebas. Proses pengolahan air PDAM Tirta Je'neberang Kabupaten Gowa dibagi menjadi dua fase. Fase pertama dilaksanakan pada bulan Januari hingga Juni, sedangkan fase kedua dilaksanakan pada bulan Juli hingga Desember masing-masing pada tahun 2020. Data terkontrol secara statistik pada pebobot 0,8 dan BKA 10,58 untuk kedua fase berdasarkan hasil monitoring. Hal ini menunjukkan bahwa tidak ada data di luar kendali sehingga pembobotan 0,8 merupakan pembobotan yang paling efektif untuk mendeteksi proses rata-rata.

Kata kunci: Bagan Kendali, Air, MEWMA.

### PENDAHULUAN

Air merupakan salah satu komponen terpenting dalam memelihara kehidupan manusia dan kehidupan makhluk hidup lainnya, dan fungsinya tidak dapat dipenuhi oleh komponen lain mana pun. Berbagai aktivitas manusia, baik dalam kehidupan ekonomi maupun sosial, seperti industri, rumah sakit, hotel, perdagangan, perkantoran, dan pendidikan, selalu membutuhkan volume air yang cukup besar. Hal tersebut memerlukan volume air dengan jumlah yang dibutuhkan bergantung pada aktivitas masyarakat. Kebutuhan air semakin meningkat seiring dengan pertumbuhan penduduk dan aktivitas perekonomian, baik dari segi kuantitas maupun kualitas. Cara menjaga pelayanan air bersih merupakan salah satu permasalahan yang sering muncul, terutama pada saat pergantian musim. Selain karena pada musim kemarau terjadi kekurangan bahan baku air dan dapat mempengaruhi pelayanan air bersih, musim hujan menyebabkan keluaran air meningkat dan terkadang keruh akibat erosi gunung.

---

Penerapan bagan kendali merupakan salah satu cara yang dapat dimanfaatkan untuk menilai kualitas air. Walter E. Shewhart pertama kali menemukan bagan kendali pada tahun 1924, dan sejak itu bagan kendali tersebut menjadi salah satu pendekatan pengendalian proses statistik yang paling banyak digunakan di dunia industri untuk memantau karakteristik kualitas. Seiring berkembangnya teknologi, semakin banyak ciri kualitas yang terkait digunakan untuk mengamati dan menilai suatu produk berdasarkan kuantitas karakteristiknya, bagan kendali dapat dibagi menjadi dua kategori yaitu univariat dan multivariat.

Bagan kendali univariat memantau satu karakteristik, sedangkan prosedur pemantauan dan pengendalian proses terkadang menggabungkan beberapa karakteristik kualitas. Untuk mengakomodasi pengendalian proses yang mencakup beberapa karakteristik kualitas, dibuatlah bagan kendali multivariat. Dibandingkan dengan bagan kendali univariat, bagan kendali multivariat lebih akurat karena memperhitungkan hubungan antar variabel. Selain itu, menurut Bodnar dan Schmid (2007), bagan kendali multivariat berupaya mengidentifikasi perubahan dalam proses univariat. Selain itu, menurut Bersimis dkk. (2007), menggabungkan dua atau lebih karakteristik yang dijumlahkan secara terpisah dan menghasilkan kesimpulan yang salah. Akibatnya, bagan kendali multivariat dirancang untuk menggabungkan banyak karakteristik kualitas. Perkembangan bagan kendali multivariat antara lain bagan kendali multivariat CUSUM, bagan kendali *Hotelling T2*, bagan kendali MEWMA, MEWMV, MNP, *chisquare*, CCC & C. Penelitian ini berfokus pada bagan kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA), yang dapat digunakan untuk mengidentifikasi perubahan rata-rata di berbagai jenis diagram kendali.

Berdasarkan penelitian sebelumnya (Oktaria H, 2009) tentang penggunaan bagan kendali MEWMA dan MEWMV pada proses produksi Coca-Cola 1,5L, penerapan bagan kendali MEWMA untuk mengontrol rata-rata proses karakteristik volume gas dan kualitas brix dengan bobot yang berbeda mengakibatkan rata-rata proses terkendali, dan terbukti semakin kecil bobot maka semakin sensitif dalam pengendalian. Lebih lanjut Osayamore dan Siloko (2019) sampai pada kesimpulan bahwa parameter *smoothing* ( $\lambda$ ) dan bagan kendali MEWMA yang diperoleh pada berbagai nilai alpha ( $\alpha$ ) mampu mendeteksi perubahan kecil, sedang, dan besar pada setiap proses produksi.

Penelitian ini menggunakan bagan kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) untuk memantau pergeseran rata-rata pada kualitas air.

## METODE PENELITIAN

Data sekunder dari PDAM Tirta Je'neberang Kabupaten Gowa digunakan dalam penelitian ini dengan sampel pengukuran yaitu kekeruhan dan klor bebas. Proses pengolahan air PDAM Tirta Je'neberang Kabupaten Gowa dibagi menjadi dua fase. Fase pertama dilaksanakan pada bulan Januari hingga Juni, sedangkan fase kedua dilaksanakan pada bulan Juli hingga Desember masing-masing pada tahun 2020. Sesuai dengan tujuan penelitian ini data harus berdistribusi normal multivariat dan berkorelasi untuk memperkirakan kualitas air menggunakan bagan kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) dalam mendeteksi pergeseran rata-rata. Karena asumsi tersebut diperlukan agar bagan kendali dapat digunakan dalam mengolah data. Selain itu, karena data memiliki beberapa skala pengukuran, maka data dinormalisasi menggunakan *z-score* sebelum dibuat bagan kendali MEWMA.

Adapun Langkah-langkah analisis yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. Menentukan rumus bagan kendali MEWMA,
2. Mendeskripsikan data pengolahan air dari PDAM Tirta Jeneberang Kabupaten Gowa menggunakan statistik deskriptif,
3. Melakukan uji distribusi normal multivariat pada data pengolahan air PDAM Tirta Je'neberang Kabupaten Gowa untuk mengetahui variabel berdistribusi normal,
4. Melakukan uji korelasi pada pengolahan air PDAM Tirta Jeneberang Kabupaten Gowa untuk mengetahui variabel saling berkorelasi,
5. Melakukan analisis data fase I menggunakan bagan kendali MEWMA,

6. Melakukan monitoring pada data fase II,
7. Menghitung indeks kapabilitas proses, dan
8. Menarik Kesimpulan.

## HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

### 1. Bagan Kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA)

Bagan kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) digunakan untuk mendeteksi adanya mean proses yang kecil secara multivariat dengan kelebihan *robust* terhadap asumsi distribusi normal, sehingga data ini bisa digunakan ketika tidak memenuhi asumsi normal. Bagan kendali MEWMA mengakumulasikan informasi yang didapat dari masa lampau, sehingga membuat bagan kendali ini lebih sensitif untuk mendeteksi pergeseran rata yang kecil.

Misalkan  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$  merupakan peubah acak berukuran  $p \times 1$ . Peubah ini berdistribusi normal multivariat dengan vector mean  $\boldsymbol{\mu}$  dan matriks kovarian  $\boldsymbol{\Sigma}$  dengan asumsi masing-masing diketahui. Proses terkendali (*in control*) jika  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$  proses tidak terkendali jika  $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$  sehingga dibentuk persamaan:

$$\mathbf{Z}_0 = \boldsymbol{\mu}_0 \quad (1)$$

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \mathbf{X}_i + (1 - \lambda)\mathbf{Z}_{i-1}; i \geq 1. \quad (2)$$

Dimana  $\lambda$  bernilai konstan dan memenuhi  $0 < \lambda \leq 1$ . Jika proses dalam keadaan terkendali, maka vector mean dan matriks kovarian untuk  $\mathbf{Z}_i$  adalah

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \mathbf{X}_i + (1 - \lambda)\mathbf{Z}_{i-1}$$

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \mathbf{X}_i + (1 - \lambda)[\lambda \mathbf{X}_{i-1} + (1 - \lambda)\mathbf{Z}_{i-2}]$$

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \mathbf{X}_i + \lambda(1 - \lambda)\mathbf{X}_{i-1} + (1 - \lambda)^2\mathbf{Z}_{i-2}$$

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \mathbf{X}_i + \lambda(1 - \lambda)\mathbf{X}_{i-1} + (1 - \lambda)^2[\lambda \mathbf{X}_{i-2} + (1 - \lambda)\mathbf{Z}_{i-3}]$$

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \mathbf{X}_i + (1 - \lambda)\lambda \mathbf{X}_{i-1} + (1 - \lambda)^2\lambda \mathbf{X}_{i-2} + (1 - \lambda)^3\lambda \mathbf{Z}_{i-3}$$

⋮

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \mathbf{X}_i + (1 - \lambda)\lambda \mathbf{X}_{i-1} + (1 - \lambda)^2\lambda \mathbf{X}_{i-2} + \dots + \lambda(1 - \lambda)^{i-1}\lambda \mathbf{X}_{i-(i-1)} + (1 - \lambda)^i\mathbf{Z}_{i-1}$$

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \mathbf{X}_i + (1 - \lambda)\lambda \mathbf{X}_{i-1} + (1 - \lambda)^2\lambda \mathbf{X}_{i-2} + \dots + \lambda(1 - \lambda)^{i-1}\lambda \mathbf{X}_1 + (1 - \lambda)^i\mathbf{Z}_0$$

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r \mathbf{X}_{i-r} + (1 - \lambda)^i \mathbf{Z}_0; i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3)$$

Selanjutnya, untuk ekspektasi  $\mathbf{E}(\mathbf{Z}_i)$  untuk setiap sampel ke- $i$  didefinisikan dengan  $\mathbf{E}(\mathbf{X}_i) = \boldsymbol{\mu}_0$ , sehingga diperoleh persamaan  $\mathbf{E}(\mathbf{Z}_i)$  sebagai berikut:

$$\mathbf{E}(\mathbf{Z}_i) = \mathbf{E} \left[ \lambda \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r \mathbf{X}_{i-r} + (1 - \lambda)^i \mathbf{Z}_0 \right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{Z}_i) = \mathbf{E} \left[ \lambda \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r \mathbf{X}_{i-r} \right] + \mathbf{E}[(1 - \lambda)^i \mathbf{Z}_0]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{Z}_i) = \lambda \mathbf{E} \left[ \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r \mathbf{X}_{i-r} \right] + (1 - \lambda)^i \mathbf{Z}_0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{Z}_i) = \lambda \mathbf{E}[\mathbf{X}_i + (1 - \lambda)\mathbf{X}_{i-1} + (1 - \lambda)^2\mathbf{X}_{i-2} + \dots + (1 - \lambda)^{i-1}\mathbf{X}_1] + (1 - \lambda)^i \mathbf{Z}_0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{Z}_i) = \lambda \{ \mathbf{E}[\mathbf{X}_i] + \mathbf{E}[(1 - \lambda)\mathbf{X}_{i-1}] + \mathbf{E}[(1 - \lambda)^2\mathbf{X}_{i-2}] + \dots + \mathbf{E}[(1 - \lambda)^{i-1}\mathbf{X}_1] \} + (1 - \lambda)^i \mathbf{Z}_0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{Z}_i) = \lambda \{ \mathbf{E}[\mathbf{X}_i] + (1 - \lambda)\mathbf{E}[\mathbf{X}_{i-1}] + (1 - \lambda)^2\mathbf{E}[\mathbf{X}_{i-2}] + \dots + (1 - \lambda)^{i-1}\mathbf{E}[\mathbf{X}_1] \} + (1 - \lambda)^i \mathbf{Z}_0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{Z}_i) &= \lambda\{\boldsymbol{\mu}_0 + (1 - \lambda)\boldsymbol{\mu}_0 + (1 - \lambda)^2\boldsymbol{\mu}_0 + \dots + (1 - \lambda)^{i-1}\boldsymbol{\mu}_0\} + (1 - \lambda)^i\mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{E}(\mathbf{Z}_i) &= \lambda\boldsymbol{\mu}_0 \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r + (1 - \lambda)^i\mathbf{Z}_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Berdasarkan persamaan (1) dimana  $\mathbf{Z}_0 = \boldsymbol{\mu}_0$ , sehingga persamaan (4) menjadi:

$$\mathbf{E}(\mathbf{Z}_i) = \lambda\boldsymbol{\mu}_0 \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r + (1 - \lambda)^i\boldsymbol{\mu}_0 \quad (5)$$

Pada persamaan (4.5) terdapat nilai  $\sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r$  yang dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r &= (1 - \lambda)^0 + (1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2 + \dots + (1 - \lambda)^{i-1} \\ \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r &= 1 + (1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2 + (1 - \lambda)^3 + \dots + (1 - \lambda)^{i-1} \end{aligned} \quad (6)$$

Pada persamaan (6) terlihat membentuk deret geometri dengan nilai awal  $a = 1, b = (1 - \lambda)$  dan banyaknya nilai  $n = i$ , maka dengan menggunakan rumus deret geometri diperoleh:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r &= \frac{a(1 - b^n)}{(1 - b)} \\ \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r &= \frac{1(1 - (1 - \lambda)^i)}{1 - (1 - \lambda)} \\ \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r &= \frac{1 - (1 - \lambda)^i}{\lambda} \end{aligned} \quad (7)$$

Selanjutnya persamaan (7) disubstitusikan ke persamaan (5), maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{Z}_i) &= \lambda\boldsymbol{\mu}_0 \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r + (1 - \lambda)^i\boldsymbol{\mu}_0 \\ \mathbf{E}(\mathbf{Z}_i) &= \lambda\boldsymbol{\mu}_0 \left( \frac{1 - (1 - \lambda)^i}{\lambda} \right) + (1 - \lambda)^i\boldsymbol{\mu}_0 \\ \mathbf{E}(\mathbf{Z}_i) &= \boldsymbol{\mu}_0(1 - (1 - \lambda)^i) + (1 - \lambda)^i\boldsymbol{\mu}_0 \\ \mathbf{E}(\mathbf{Z}_i) &= \boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_0(1 - \lambda)^i + (1 - \lambda)^i\boldsymbol{\mu}_0 \\ \mathbf{E}(\mathbf{Z}_i) &= \boldsymbol{\mu}_0 \end{aligned} \quad (8)$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai variansi  $\mathbf{Z}_i$  jika  $\mathbf{X}_i$  diketahui, sehingga diperoleh:

$$\text{Var}(\mathbf{z}_i) = \text{Var} \left\{ \lambda \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r \mathbf{X}_{i-r} + (1 - \lambda)^i \mathbf{Z}_0 \right\} \quad (9)$$

Berdasarkan sifat variansi untuk c konstanta bernilai 0 atau dengan kata lain  $\text{Var}(c) = 0$ , karena  $(1 - \lambda)^i \mathbf{Z}_0$  merupakan konstanta pada persamaan (9) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{z}_i) &= \text{Var} \left\{ \lambda \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r \mathbf{X}_{i-r} \right\} + \text{Var}\{(1 - \lambda)^i \mathbf{Z}_0\} \\ \text{Var}(\mathbf{z}_i) &= \text{Var} \left\{ \lambda \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r \mathbf{X}_{i-r} \right\} + 0 \\ \text{Var}(\mathbf{z}_i) &= \text{Var} \left\{ \lambda \sum_{r=0}^{i-1} (1 - \lambda)^r \mathbf{X}_{i-r} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Var}(\mathbf{z}_i) = \text{Var} \left\{ \lambda \sum_{r=0}^{i-1} (1-\lambda)^r \mathbf{X}_{i-r} \right\}$$

$$\text{Var}(\mathbf{z}_i) = \lambda^2 \sum_{r=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2r} \text{Var}(\mathbf{X}_{i-r})$$

Selanjutnya diasumsikan  $\text{Var}(\mathbf{X}_{i-r}) = \Sigma$  sehingga diperoleh:

$$\text{Var}(\mathbf{z}_i) = \lambda^2 \sum_{r=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2r} \Sigma$$

$$\text{Var}(\mathbf{z}_i) = \lambda^2 \frac{1(1 - (1-\lambda)^{2i})}{1 - (1-\lambda)^2} \Sigma$$

$$\text{Var}(\mathbf{z}_i) = \lambda^2 \frac{1(1 - (1-\lambda)^{2i})}{1 - (1-2\lambda + \lambda^2)} \Sigma$$

$$\text{Var}(\mathbf{z}_i) = \frac{\lambda^2(1 - (1-\lambda)^{2i})}{1 - 1 + 2\lambda - \lambda^2} \Sigma$$

$$\text{Var}(\mathbf{z}_i) = \frac{\lambda(1 - (1-\lambda)^{2i})}{2 - \lambda} \Sigma \tag{10}$$

Matriks Kovarian  $\text{Var}_{\mathbf{z}}$  dapat juga dituliskan sebagai berikut:

$$\text{Var}(\mathbf{z}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{Var}_{\mathbf{z}_i}$$

$$\text{Var}(\mathbf{z}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lambda(1 - (1-\lambda)^{2r})}{2 - \lambda} \Sigma$$

$$\text{Var}(\mathbf{z}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lambda(1 - (1-\lambda)^0)}{2 - \lambda} \Sigma$$

$$\text{Var}(\mathbf{z}) = \frac{\lambda}{2 - \lambda} \Sigma \tag{11}$$

Adapun data yang akan diplot pada bagan kendali MEWMA adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{T}_i^2 = \mathbf{Z}_i^t [\text{Var}(\mathbf{z}_i)]^{-1} \mathbf{Z}_i \tag{12}$$

Proses dikatakan terkendali apabila nilai pengamatan lebih kecil dari batas kendali atau  $\mathbf{T}_i^2 < h_4$ . Dimana nilai  $h_4$  membuat ARL terkendali ketika grafik MEWMA dimulai dengan  $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}$ . Nilai  $h_4$  merupakan batas kendali atas yang nilainya disesuaikan pada banyaknya  $p$  (jumlah karakteristik kualitas) yang telah ditentukan.

## 2. Deskriptif Karakteristik Kualitas Air PDAM Tirta Je'ne'berang

Karakteristik kualitas yang dianalisis secara umum dapat dilakukan dengan ringkasan statistik deskriptif untuk mencari rata-rata, standar deviasi, varians, nilai minimum dan nilai maksimum dari data kualitas air PDAM Tirta Je'ne'berang seperti ditunjukkan pada Tabel berikut:

**Tabel 1.** Statistik Deskriptif Karakteristik Kualitas Air PDAM Tirta Je'neberang Kabupaten Gowa

Variabel	Nilai Min	Nilai Max	Mean	Std. Dev.	Variance
Kekeruhan	1,27	8,12	3,60	1,30	1,70
Klor Bebas	0,10	2,79	0,68	0,51	0,26

Sumber: Diolah, 2023.

## 3. Uji Distribusi Normal Multivariat Kualitas Air PDAM Tirta Je'ne'berang

Uji asumsi multivariat normal dilakukan untuk kedua karakteristik kualitas kekeruhan dan klor bebas sebagai berikut:

1. Hipotesis

$H_0$  : Data kualitas air berdistribusi normal multivariat

$H_1$  : Data kualitas air tidak berdistribusi normal multivariat

2. Statistik Uji

$$d_i^2 = (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})$$

3. Kriteria Uji

$H_0$  diterima jika lebih dari 50% dari nilai  $d_i^2 \leq \chi_{\frac{1}{n}(i-0,5),p}^2$ .

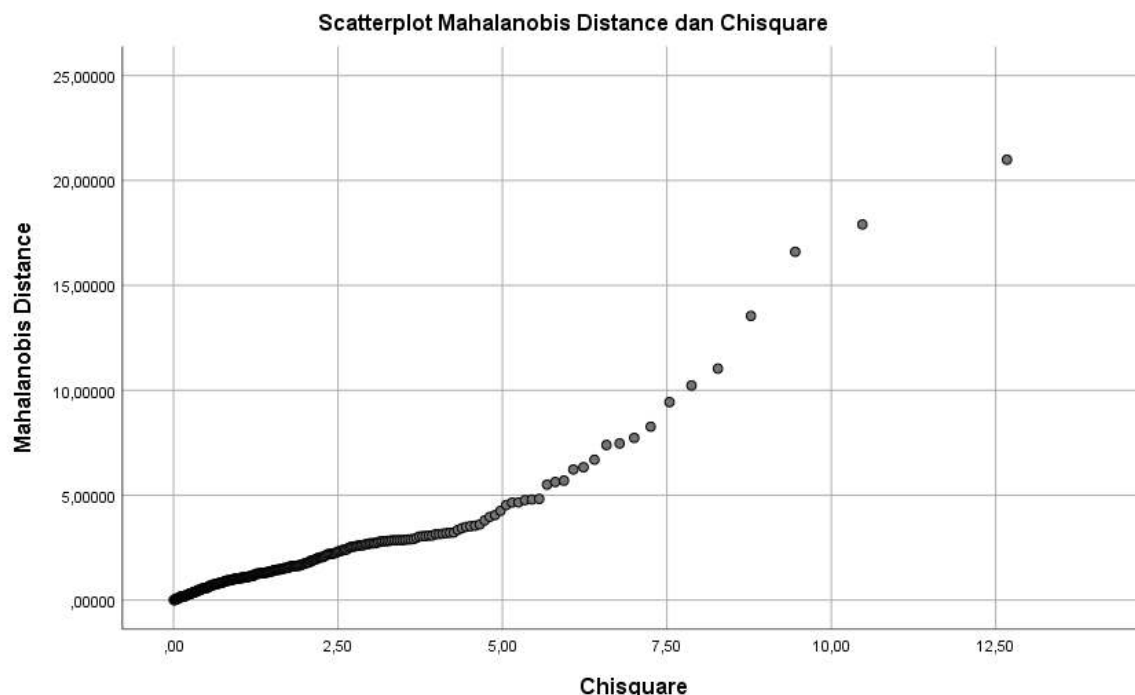
Perhitungan jarak kuadrat sebagai berikut:

$$d_1^2 = [3,37 - 3,60 \quad 0,48 - 0,68] \begin{bmatrix} 0,63 & -0,42 \\ -0,42 & 4,19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,37 - 3,60 \\ 0,48 - 0,68 \end{bmatrix}$$

$$d_1^2 = [-0,23 \quad -0,20] \begin{bmatrix} 0,63 & -0,42 \\ -0,42 & 4,19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,23 \\ -0,20 \end{bmatrix}$$

$$d_1^2 = [-0,06 \quad -0,78] \begin{bmatrix} -0,23 \\ -0,20 \end{bmatrix} = 0,17$$

Untuk  $d_2^2, d_3^2, d_4^2, \dots, d_{282}^2$  dihitung dengan menggunakan cara yang sama. Hasil perhitungan  $d_i^2$  untuk setiap pengamatan kemudian diurutkan dari nilai terkecil ke terbesar. Selanjutnya menghitung nilai kuantil untuk chisquare distribusi dengan  $df = p$  dimana  $q_{c,p} \frac{j-\frac{1}{2}}{n} = \chi_p^2 \left(1 - \frac{j-\frac{1}{2}}{n}\right)$ . Setelah mendapatkan nilai  $d_i^2$  untuk setiap pengamatan, langkah selanjutnya yaitu menghitung nilai  $\chi_{\alpha,2}^2$  dengan  $\alpha = 0,05$  dan  $df = 2$ . Sehingga diperoleh nilai  $\chi_{0,05,2}^2 = 5,9991$ . Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh nilai  $d_i^2$  dan  $\chi_{\alpha,2}^2$ , sehingga dari 282 data pengamatan nilai diperoleh yaitu 0,9504 atau sama dengan 95,04% artinya nilai proporsi lebih dari 50% sehingga gagal tolak  $H_0$  dan dapat disimpulkan karakteristik kualitas air PDAM Tirta Je'neberang berdistribusi normal multivariat. Pada Gambar 1 disajikan hasil plot  $d_i^2$  dengan *Chisquare* dengan data yang telah diurutkan dari yang terkecil sampai terbesar.



Sumber: Diolah, 2023.

**Gambar 1.** Scatterplot  $d_i^2$  dan Chisquare

#### 4. Uji Korelasi Kualitas Air PDAM Tirta Je'ne'berang

Pengujian asumsi selanjutnya adalah uji korelasi untuk mengetahui hubungan antar variabel dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Hipotesis

$H_0$ :  $R = I$  (tidak ada korelasi antar variabel)

$H_1$ :  $R \neq I$  (ada korelasi antar variabel)

2. Statistik Uji

$$\chi_{hitung}^2 = \left[ n - 1 - \frac{2p + 5}{6} \right] \ln |R|$$

3. Kriteria Uji

$H_0$  diterima jika  $\chi_{hitung}^2 \leq \chi_{(\alpha, \frac{1}{2}p(p-1))}^2$ .

Sebelum menghitung nilai  $\chi_{hitung}^2$ , terlebih dahulu dilakukan perhitungan matriks korelasi sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0,26022 \\ 0,26022 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menentukan determinan matriks korelasi sebagai berikut:

$$|R| = \begin{vmatrix} 1 & 0,26 \\ 0,26 & 1 \end{vmatrix} = 0,93$$

$$\ln |R| = 0,07$$

Sehingga diperoleh nilai dari  $\chi_{hitung}^2$  adalah sebagai berikut:

$$\chi_{hitung}^2 = \left( n - 1 - \frac{2p + 5}{6} \right) \ln |R|$$

$$\chi_{hitung}^2 = \left( 282 - 1 - \frac{2(2) + 5}{6} \right) (0,07)$$

$$\chi_{hitung}^2 = 19,59$$

Untuk  $\alpha = 0,05$  dan  $df = \frac{1}{2}p(p - 1) = 1$ , diperoleh  $\chi^2_{(\alpha, \frac{1}{2}p(p-1))} = 3,84$ .

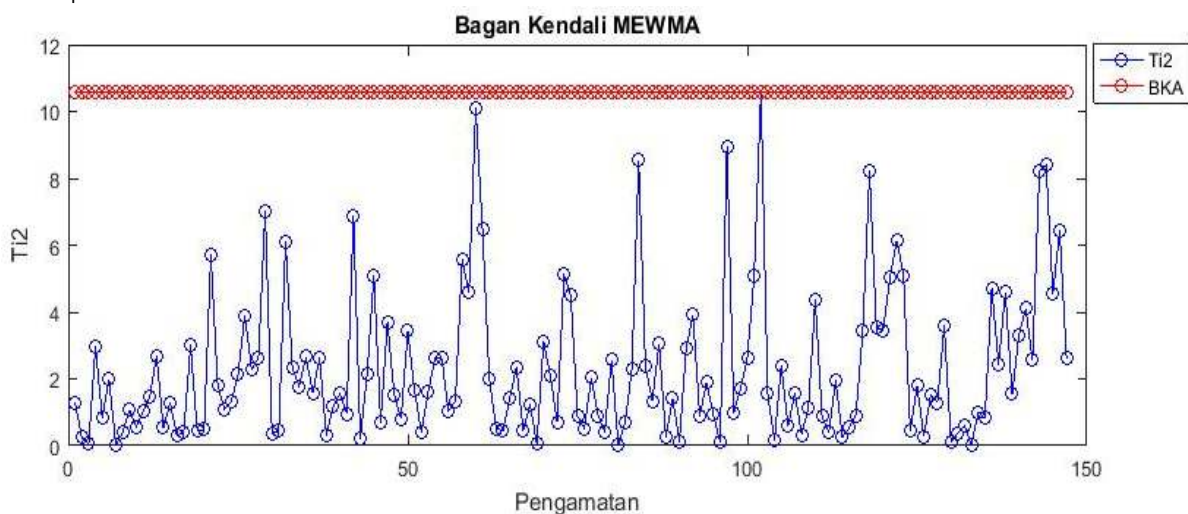
Berdasarkan hasil perhitungan tersebut didapatkan hasil  $\chi^2_{hitung} = 19,59$  lebih besar dari  $\chi^2_{(\alpha, \frac{1}{2}p(p-1))} = 3,84$  yang menunjukkan tolak  $H_0$  artinya antar karakteristik kualitas air PDAM Tirta Je'ne'berang saling berkorelasi sehingga memenuhi untuk dilakukan pengendalian kualitas dengan menerapkan bagan kendali.

## 5. Analisis Data dengan Bagan Kendali MEWMA Fase I

Tujuan utama pada bagan kendali MEWMA adalah mendeteksi rata-rata proses pada data multivariat dengan sampel individual. Pemeriksaan tersebut menggunakan bagan kendali MEWMA dengan pembobot  $0,05 \leq \lambda \leq 0,8$  dengan titik plot yang yang diperoleh dari persamaan (12). Pada bagan kendali MEWMA terdapat garis vertikal yang merupakan hasil perhitungan sementara garis horizontal merupakan pengamatan setiap hari.

Pengendalian rata-rata proses pada pembobot 0,05 sampai pembobot 0,6 didapatkan adanya titik yang masih berada diluar batas kendali (Selengkapnya dapat dilihat pada Tabel 2). Berdasarkan hasil pengamatan menunjukkan grafik masih bergerak secara fluaktif tetapi terlihat semakin tinggi pembobot yang diberikan maka titik yang keluar dari batas kendali semakin sedikit dan nilai MEWMA maksimum semakin kecil. Hal ini dapat disimpulkan bahwa pengamatan bergerak secara stabil.

Pengendalian rata-rata proses pada kualitas air di PDAM Tirta Je'ne'berang dengan pembobot 0,8 ditampilkan berikut ini.



Sumber: Diolah, 2023

**Gambar 2.** Bagan Kendali MEWMA Fase I dengan  $\lambda = 0,8$ .

Hasil analisis pada **Gambar 2** menggunakan pembobot 0,8 diketahui nilai batas atas sebesar 10,58 dan nilai MEWMA maksimum sebesar 10,56. Berdasarkan nilai pembobot tersebut tidak terdapat data yang keluar dari batas kendali sehingga proses dapat dinyatakan terkendali secara statistik.

Pengendalian rata-rata proses pada kualitas air Fase I di PDAM Tirta Je'ne'berang Kabupaten Gowa dengan berbagai kombinasi nilai pembobot sudah dilakukan. Gambaran umum yang diperoleh berdasarkan hasil analisis tersebut menunjukkan rata-rata proses terkendali secara statististik pada pembobot 0,8. Pembobot tersebut merupakan pembobot yang paling optimum dalam mendeteksi pergeseran rata-rata proses pada kualitas air di PDAM Tirta Je'ne'berang Kabupaten Gowa Fase I karena tidak memiliki data *out of control*. Selengkapnya ditunjukkan pada tabel 2.



**Tabel 2.** Hasil Perhitungan MEWMA untuk Masing-masing Pembobot

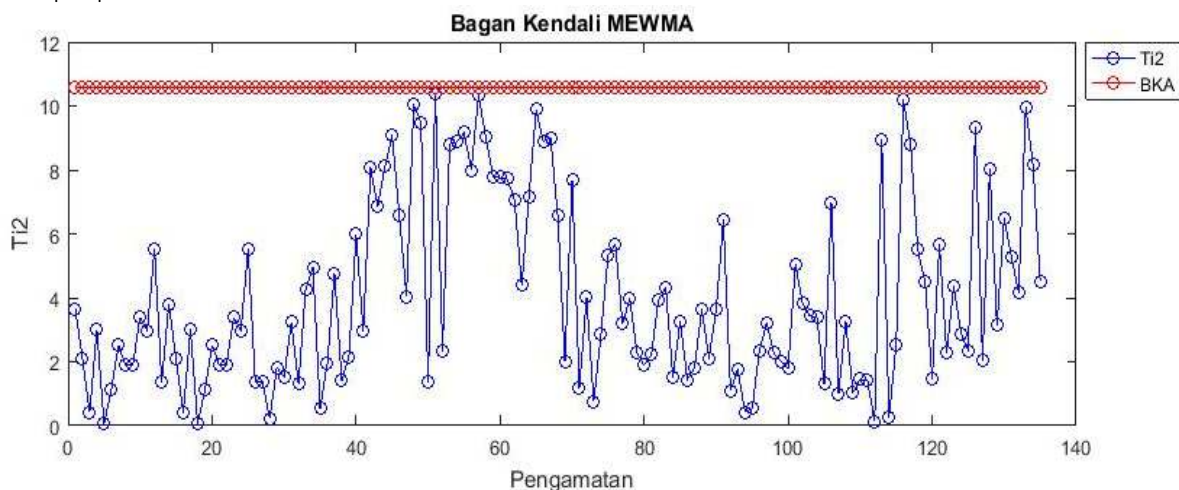
$\lambda$	BKA	Nilai MEWMA Max	Out Of Control
0,05	7,35	16,40	30
0,1	8,64	26,39	26
0,2	9,65	25,61	14
0,3	10,08	24,55	10
0,4	10,31	20,91	7
0,5	10,44	19,66	5
0,6	10,52	18,01	4
0,8	10,58	10,56	0

Sumber: Diolah, 2023.

Pada fase II yang berlangsung pada bulan Juli hingga Desember 2020, mean proses dikontrol menggunakan bobot paling optimal yang dihasilkan pada fase I.

## 6. Analisis Data dengan Bagan Kendali MEWMA Fase II

Pengendalian kualitas dengan pembobot ideal yang diperoleh pada tahap I kemudian digunakan untuk menganalisis data tahap II yaitu  $\lambda=0,8$ . Hasil pengujian pengendalian rata-rata proses pada PDAM tahap II pada Gambar 3



Sumber 3: Diolah, 2023

**Gambar 3.** Bagan Kendali MEWMA Fase II

Hasil analisis pada data Fase II dengan menggunakan pembobot  $\lambda = 0,8$  yang merupakan pembobot ideal, menghasilkan tidak adanya data yang keluar dari batas kendali sehingga dapat disimpulkan pengendalian rata-rata proses pada tahap II telah terkendali secara statistik yang dibuktikan dengan tidak adanya data yang *out of control*.

## PENUTUP

Hasil analisis dengan menerapkan bagan kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) Fase I dan II telah terkendali secara statistik pada pembobot  $\lambda = 0,8$  dengan batas kendali atas sebesar 10,58. Pembobot tersebut merupakan yang paling sensitif dalam mendeteksi pengontrolan terhadap rata-rata proses yang kecil pada kualitas air di PDAM Tirta Jeneberang Kabupaten Gowa dengan tidak terdeteksinya pengamatan yang *out of control*. Adapun saran pada penelitian selanjutnya diharapkan dapat menggunakan variabel dan jumlah pengamatan yang lebih besar.

## DAFTAR PUSTAKA

- Agresti, A., & Franklin, C. A. 2007. *Statistics The Art and Science of Learning from Data*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.
- Alves, C. C., Hening, E., Samahyol, R. W., & Konrath, A. C. 2013. *Application of Multivariate Control Charts For Monitoring An Industrial Process*. *Tecno-Logica*, 17(2), 101-107.
- Ariani, D.W. 2005. *Pengendalian Kualitas Statistik (Pendekatan Kuantitatif dalam Manajemen Kualitas)*. Yogyakarta: C.V. Andi Offset.
- Bodnar, O., & W. Schmid. 2007. *Surveillance of The Mean Behavior of Multivariate Time Series*. *Stat. Neerl.* 61(4): 383–406.
- Delsen, M.L.S.V. dan Talaku, M.W. 2016. Kinerja Bagan kendali W dan Bagan kendali G. *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, Vol 10 No 2. 137-147.
- Heizer, J. dan Render, B. 2006. *Manajemen Operasi*. Edisi 7. Jakarta: Salemba Empat.
- Iriawan N dan S.P, Astuti. 2006. *Mengolah Data Statistik dengan Mudah MINITAB 14*. Yogyakarta: Penerbit Andi.
- Suyono. 2005. *Diktat Mata Kuliah Analisis Runtun Waktu*. Jurusan matematika FMIPA UNJ: Jakarta.
- Johnson, Richard. Dean Wichern. 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 5th ed. New Jersey: Prentice.
- Kotz, S., & Johnson N. L. 1993. *Process Capability Indices*. London: Chapman & Hall.
- M. S. Hamed. 2016. *MEWMA Control Chart Procedure: Average Run Length Performance With Application,* *Journal of Statistics: Advances in Theory and Applications Volume 15, Number 2, Pages 163-203.*
- Montgomery, D. C. 2009. *Introduction to Statistical Quality Control, sixth Edition*. Amerika: John Wiley & Sons, Inc.
- Montgomery, Douglas, C., 2013. *Statistical Quality Control: A Modern Introduction, Seventh Edition*. Asia: John Wiley & Sons, Inc.
- Morison, D. 1990. *Multivariate Statistical Methods (Third Edition)*. New York: Mc Graw Hill Publishing Comfiney.
- Oktaria H, P. 2009. *Penerapan Diagram Kontrol MEWMA dan MEWMV pada Proses Produksi Coca-Cola 1,5L PT. Coca-Cola Bottling Indonesia Jawa Timur*. Surabaya: ITS.
- Osayomore Ikpotokin, and Siloko Israel Uzuazor. 2019. *A Comparative Analysis of Bootstrap Multivariate Exponentially-Weighted Moving Average (MEWMA)* .